Prontuario di geometria euclidea nello spazio

Per la scuola secondaria di I° grado

N. B. Gli argomenti presentati sono una sintesi di quelli trattati in classe e non sostituiscono ma integrano il libro di testo.

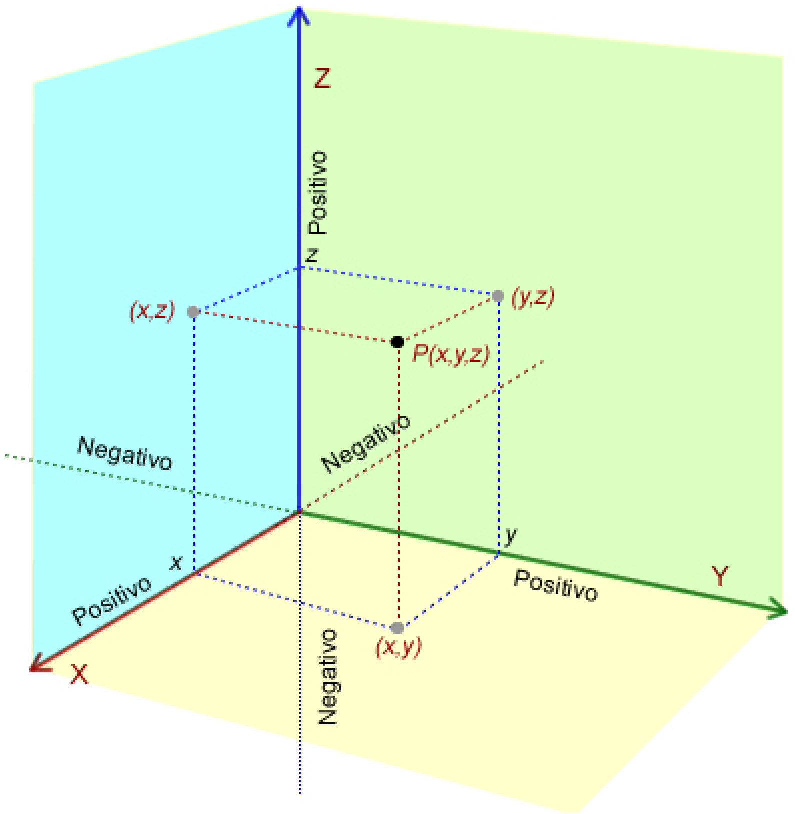
I temi contrassegnati con un asterisco * possono non essere sviluppati in classe ma costituiscono un approfondimento della materia trattata.

Sommario

Prontuario di geometria euclidea nello spazio

GENERALITÀ

Noi viviamo in uno spazio che possiede **tre dimensioni** e gli oggetti che ci circondano (e noi stessi) si sviluppano nelle tre dimensioni, sono **solidi**.
Gli enti geometrici fondamentali sono gli stessi della geometria euclidea piana: *punto, retta, piano*. Essi sono collocati nello spazio e tra loro si sviluppano nuove relazioni.

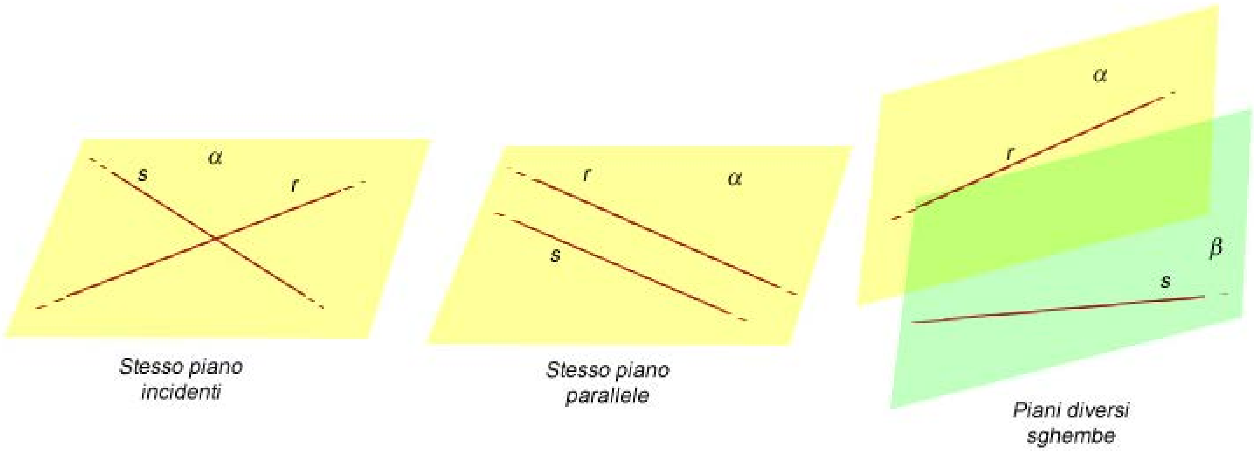


Nello spazio si può inserire anche un sistema di riferimento cartesiano costituito da tre assi perpendicolari tra loro **x**, **y**, **z**.
Le coordinate di ogni punto nello spazio sono indicate da tre valori, uno per ogni asse; per esempio nel punto P(3, 4, 7), 3 rappresenta il valore della coordinata relativa all'asse ***x***, 4 quella relativa all'asse ***y*** e 7 dell'asse ***z***.
Le coordinate possono essere anche negative; nella figura accanto è mostrata la posizione degli assi cartesiano nello spazio.

POSIZIONI RECIPROCHE DI RETTE NELLO SPAZIO

Due rette nello spazio possono avere le seguenti posizioni:

a) ***Incidenti***: sono rette incidenti se *appartengono allo stesso piano* ed hanno un solo punto in comune (se hanno *due punti in comune* sono ***coincidenti***). Un caso particolare di incidenza è la perpendicolarità.
b) ***Parallele***: sono rette parallele se *appartengono allo stesso piano* e non hanno nessun punto in comune.
c) ***Sghembe***: rette che appartengono a piani diversi e quindi non hanno punti in comune.

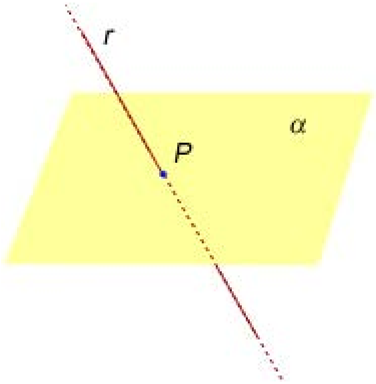


IL PIANO NELLO SPAZIO E LA RELAZIONE TRA PIANI

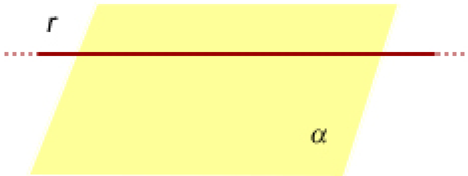
- Per *tre punti non allineati passa uno e un solo piano* mentre per due punti ne passano infiniti[1]. Per definire un piano basta *una retta e un punto esterno ad essa*.
- *Due rette incidenti* individuano un *solo piano*.
- Un piano divide lo spazio in *due semispazi*.

Relazioni tra retta e piano

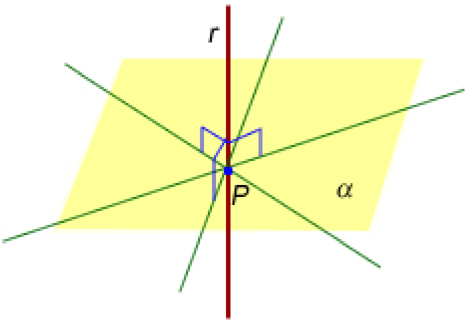
- Una retta e un piano che hanno un solo punto in comune sono tra loro ***incidenti***.



- Una retta e un piano che *non hanno punti in comune* sono tra loro ***paralleli***.



- Una retta incidente a un piano è ***perpendicolare al piano*** se *è perpendicolare a tutte le rette del piano che passano per il punto di incidenza*.

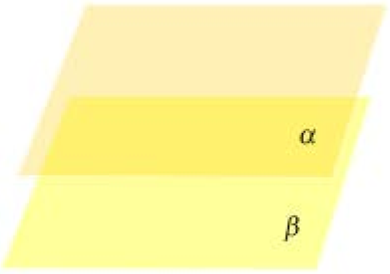


- Due rette perpendicolari allo stesso piano sono parallele tra loro.

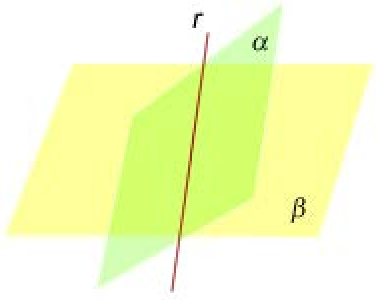
[1] Per due punti passa una ed una sola retta quindi *per una retta passano infiniti piani*.

Relazioni tra piani

⇨ Due piano che *non hanno punti* in comune sono **paralleli**[2].



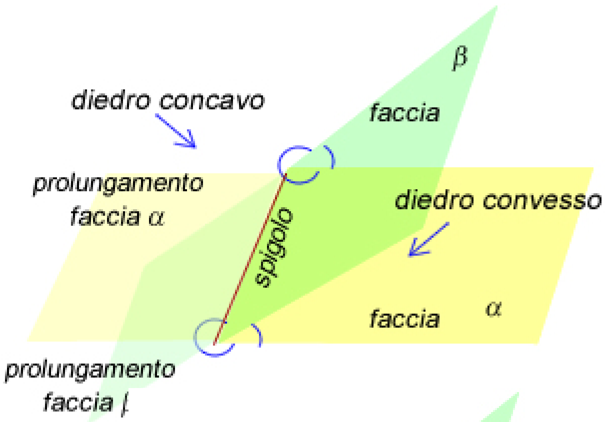
⇨ Due piani aventi *una retta o due punti*[3] in comune sono **incidenti**.



⇨ Due piani aventi *in comune almeno tre punti non allineati*, sono **coincidenti**.

ANGOLI NELLO SPAZIO

Nello spazio si definiscono due tipi di angolo: angolo **diedro** e **angoloide**.

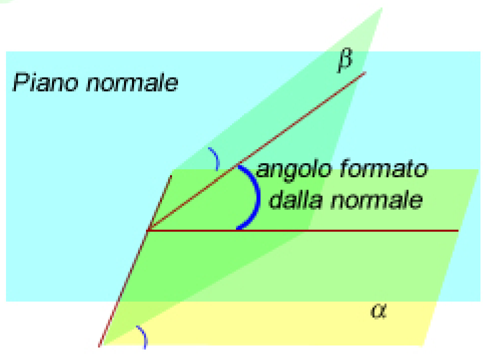


Angolo diedro

Viene detto angolo diedro ciascuna delle due regioni di spazio *individuata da due semipiani aventi per origine la stessa retta*.

I semipiani sono detti *facce*, mentre la retta *spigolo*.

Un angolo diedro può essere ***concavo*** o ***convesso***.



È ***convesso*** quando *non contiene il prolungamento delle sue facce*, ***concavo*** quando *contiene i prolungamenti*.

Un angolo diedro è **retto** quando le facce *sono perpendicolari*.

La misura di un a. diedro viene espressa in *gradi sessagesimali* e corrisponde a quella *dell'angolo piano che si forma quando si interseca il diedro con un piano perpendicolare*[4] ad esso.

Due angoli diedri possono essere

- *Consecutivi*: hanno lo spigolo, una faccia in comune e nessun altro punto

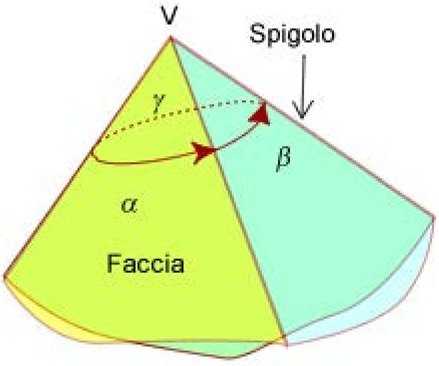
[2] I piani nello spazio sono paragonabili alle rette nel piano.
[3] Per due punti passa una ed una sola retta.
[4] Detto **piano normale**.

- *Adiacenti*: le facce non in comune si trovano sullo stesso piano.

Angoloide

L'angoloide è la parte di spazio limitata da *tre o più angoli* con queste caratteristiche:

- il *vertice in comune*.
- tutti a due a due consecutivi ma *non giacenti sullo stesso piano*.



Le parti dell'angoloide sono:

- le *facce*: gli angoli che lo formano
- gli *spigoli*: i lati degli angoli
- il *vertice*: il vertice degli angoli

La *somma delle ampiezze degli angoli* che costituiscono l'angoloide deve essere **minore di un angolo giro** (360°)[5]

I SOLIDI

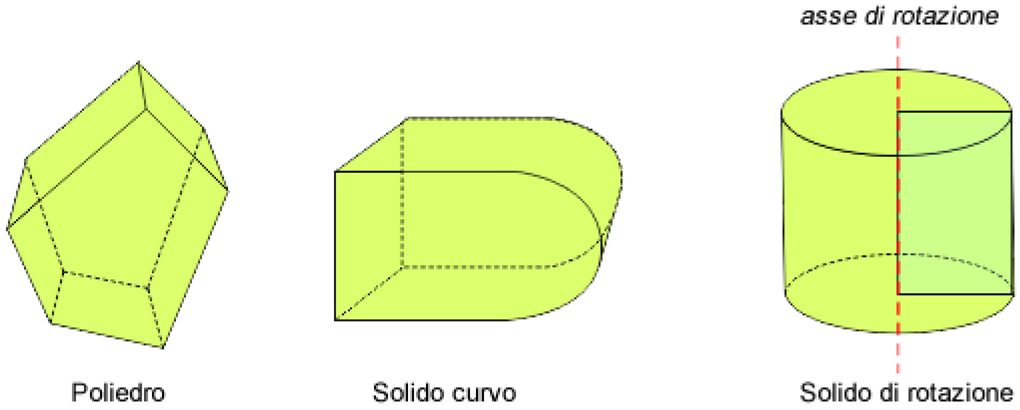
Un solido è *una porzione di spazio limitata da una superficie chiusa, piana o curva*, e possiede tre dimensioni.

I solidi si suddividono in:

⇨ **Poliedri**: la superficie del solido è formata da poligoni

⇨ **Curvo**: la superficie del solido è anche in parte curva

⇨ **Di rotazione**: la superficie del solido è originata dalla rotazione di una figura piana attorno ad un asse.



Volume di un solido e equivalenza tra solidi

Il volume di un solido *è la misura dello spazio occupato dal solido*.

L'unità di misura del volume è il **metro cubo** (m^3) ossia il *volume occupato da un cubo che abbia lo spigolo di un metro*.

[5] Altrimenti spigoli e facce sarebbero complanari (ossia sullo stesso piano) e lo spazio verrebbe diviso in due semispazi.

Sottomultipli del metro cubo:

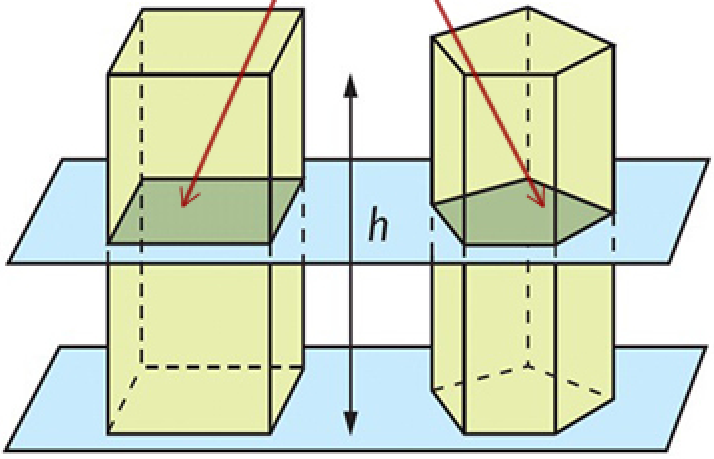
$$dm^3 = \frac{1}{10^3}m^3 \quad cm^3 = \frac{1}{10^6}m^3 \quad mm^3 = \frac{1}{10^9}m^3$$

Multipli del metro cubo:

$$dam^3 = 10^3m^3 \quad hm^3 = 10^6m^3 \quad km^3 = 10^9m^3$$

Due solidi sono **equivalenti se hanno lo stesso volume**. Per confrontare due solidi si può utilizzare il **principio di Cavalieri**[6]:

> *Siano dati due solidi delle stessa altezza; se tutte le sezioni fatte con piani paralleli ad una stessa giacitura sono, a due a due, di area uguale, essi hanno lo stesso volume.*



Misura del volume di un solido

- ⇨ Utilizzo di formule note per alcuni solidi geometrici (prismi, piramidi, cilindri, coni, ecc.).
- ⇨ Solidi reali di forma qualsiasi:
  - o utilizzo del **principio di Archimede**: *un corpo immerso in un liquido sposta una quantità di liquido pari al suo volume*. Il corpo non deve sciogliersi in acqua o nel liquidi utilizzato e non galleggiare. Il volume del corpo è dato dalla differenza tra il volume del liquido prima dell'immersione e quella dopo l'immersione; a questo scopo si utilizzano cilindri graduati o becher graduati.

  - o uso del **peso specifico**. Il peso specifico è dato dal *rapporto tra il peso P del corpo e il suo volume V* ($P_s = {}^{P}/_{V}$). Il *valore di* P_s *è caratteristico di un determinato tipo di materiale* e si misura in ${}^{g}/_{cm^3}$ o ${}^{kg}/_{dm^3}$. Il volume si calcola $V = {}^{P}/_{P_s}$.

[6] Bonaventura Cavalieri (Milano, 1598 – Bologna, 30 novembre 1647) è stato un matematico italiano. Fu l'inventore dell'assonometria cavaliera.

- Per solidi particolari, cavi, solubili in acqua, ecc. esistono metodi specifici.

I POLIEDRI

Un poliedro è *un solido delimitato da poligoni in modo che ogni lato di ciascun poligono sia esattamente in comune a due poligoni*.

Nei poligoni si distinguono:

- le **facce**: i poligoni
- gli **spigoli**: i lati dei poligoni
- i **vertici**: i vertici dei poligoni.

Le facce *non devono essere complanari* e *ogni vertice deve appartenere ad almeno tre spigoli*.

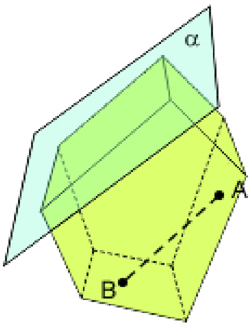
La **relazione di Eulero** mette in relazione le facce, gli spigoli e i vertici di un poliedro ed la seguente:

$$f + v - s = 2$$

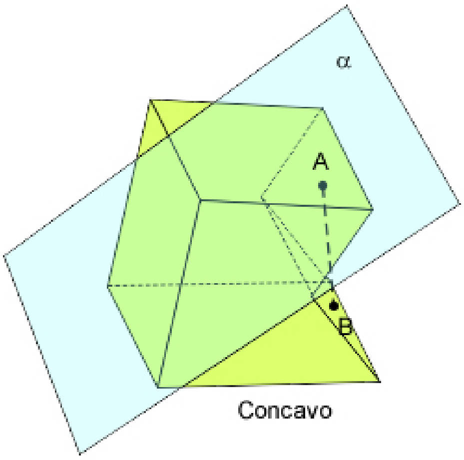
Dove f sono le facce, v i vertici e s gli spigoli.

Un poliedro può essere:

- **convesso** se un *qualsiasi segmento che colleghi due qualsiasi suoi punti appartenga al poliedro* o se *ogni sua faccia appartiene ad un piano che non interseca il poligono.*
- **concavo** se esiste almeno *un segmento collegante due qualsiasi suoi punti che non appartenga interamente al poliedro* o se almeno *una sua faccia appartiene ad un piano che interseca il poligono*.



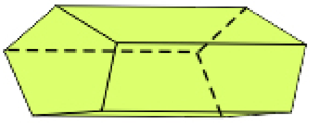
Convesso

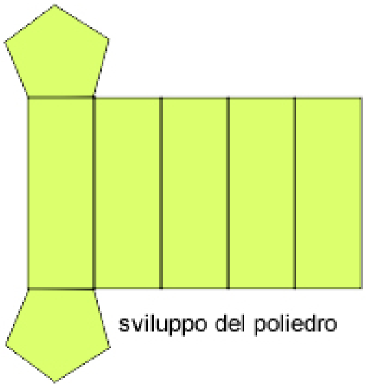


Concavo

Sviluppo di un poliedro

Lo sviluppo di un poliedro *è la rappresentazione nel piano di tutta la superficie del solido* ossia di tutte le sue facce. La misura della superficie di questo sviluppo coincide con *l'area della superficie del solido*.


poliedro


sviluppo del poliedro

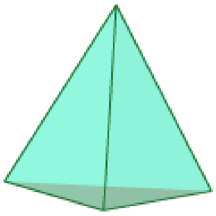
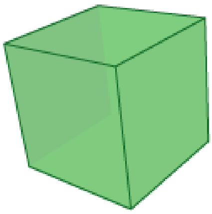
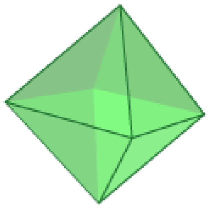
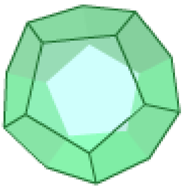
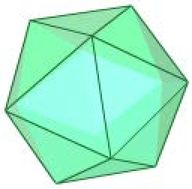
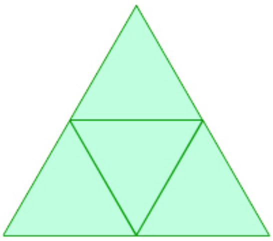
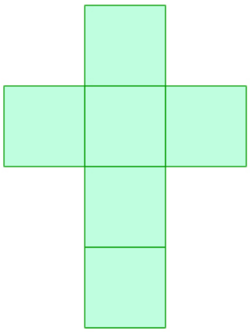
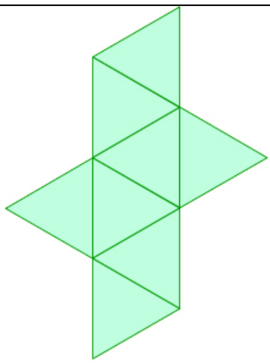
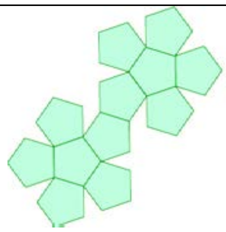
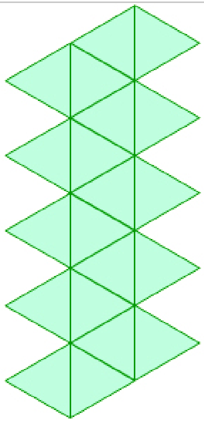
Poliedri regolari

Un **poliedro regol**are (o *solido platonico*) ha per facce dei poligoni regolari tra loro congruenti.

I poliedri regolari[7] sono cinque:

- **tetraedro**: 4 triangoli equilateri congruenti
- **esaedro** o **cubo**: 6 quadrati congruenti
- **ottaedro**: 8 triangoli equilateri congruenti
- **dodecaedro**: 12 pentagoni regolari congruenti
- **icosaedro**: 20 triangoli equilateri congruenti

I poliedri regolari **sono solo cinque** perché *ogni vertice deve essere in comune ad almeno tre poligoni formando così un angoloide per cui la somma degli angoli che concorrono alla formazione dell'angoloide deve essere minore di 360°*[8]. Solamente i triangoli equilateri ($60° \times 3 = 180°$ o $60° \times 4 = 240°$ o $60° \times 5 = 300°$ mentre $60° \times 6 = 360°$), quadrati ($90° \times 3 = 270°$ mentre $90° \times 4 = 360°$) e pentagoni ($108° \times 3 = 324°$ mentre $108° \times 4 = 432°$) hanno questa possibilità mentre l'esagono regolare o un poligono regolare con numero di lati superiore a cinque no ($120° \times 3 = 360°$)

Tetraedro	Esaedro	Ottaedro	Dodecaedro	Icosaedro
				
Sviluppo				
				

[7] Per approfondimenti su questo argomento consulta:
- http://www.gpmeneghin.com/schede/riga/plato/platonici.htm
- http://www.math.it/formulario/poliedri_regolari.htm

[8] Vedi angoloide precedentemente

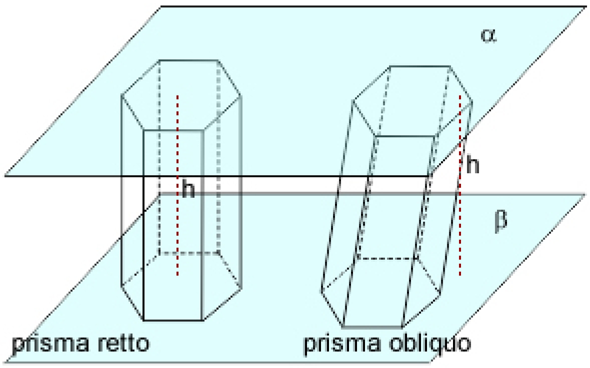
I prismi

Un prisma è un poliedro avente **due facce poligonali congruenti e parallele** dette **basi** e le altre facce sono costituite da **parallelogrammi** (**facce laterali**) che uniscono tra loro i lati corrispondenti delle basi.

I lati delle basi sono gli *spigoli di base* mentre i lati dei parallelogrammi non coincidenti con quelli delle basi sono gli *spigoli laterali*.

I prismi si dividono in:

- **prismi retti**: le *facce laterali sono dei rettangoli* per cui gli *spigoli laterali sono perpendicolari alle basi*
- **prismi obliqui**: le *facce laterali sono dei parallelogrammi non rettangoli* per cui gli *spigoli laterali non sono perpendicolari alle basi*

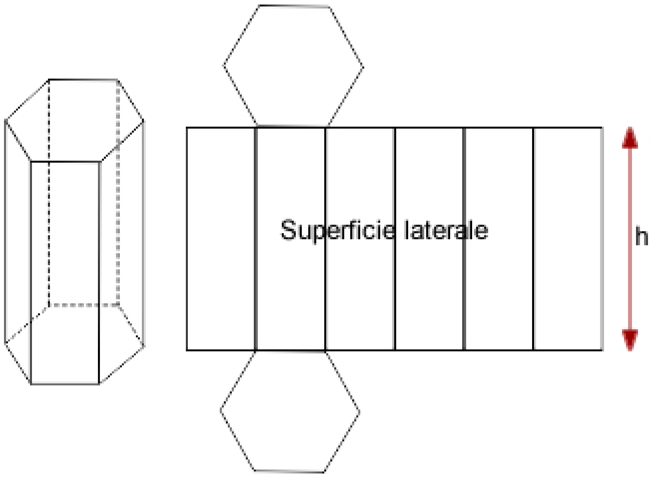


La *distanza tra le basi* è detta **altezza** del prisma; nel prisma retto la *misura dell'altezza coincide con quella dello spigolo laterale*.

Un prisma che ha per base un *poligono regolare* è detto *prisma regolare*. Il *nome di un prisma deriva da quello delle basi*: per esempio prisma a base triangolare, prisma a base quadrata, prisma a base esagonale, ecc.

Prismi retti

Lo sviluppo di un prisma retto è dato da un *rettangolo risultante dalla somma delle facce laterali rettangolari del prisma*, la cui area è l'**area della superficie laterale** e dai *due poligoni di base*. L'*area complessiva della superficie* del solido è detta **area della superficie totale**.



Formule relative all'area della superficie di un prisma retto.

L'area laterale si calcola *moltiplicando il perimetro di base per l'altezza del prima*:

$$A_{laterale} = P_{base} \cdot h$$

L'area totale si calcola *sommando all'area laterale la doppia area di base*[9]:

$$A_{totale} = A_{laterale} + 2A_{base}$$

Formule inverse

$$P_{base} = \frac{A_{laterale}}{h} \qquad h = \frac{A_{laterale}}{P_{base}}$$

Formule relative al volume del prisma retto

Il volume di un prisma retto si calcola *moltiplicando l'area di una base per l'altezza del prisma*.

$$V = A_{base} \cdot h$$

Formule inverse

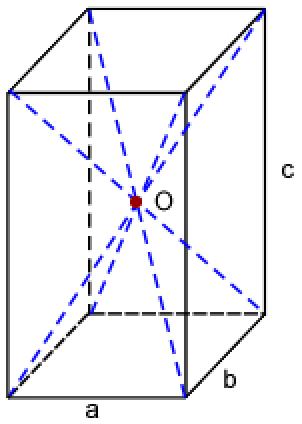
$$A_{base} = \frac{V}{h} \qquad h = \frac{V}{A_{base}}$$

Prismi retti particolari

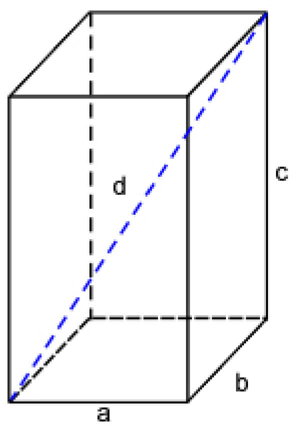
Parallelepipedo rettangolo

Il parallelepipedo rettangolo è un *prisma retto in cui tutte le facce sono dei rettangoli*.

a, *b*, *c* sono le dimensioni del parallelepipedo rettangolo: *a* e *b* sono le *dimensioni di base*, *c* corrisponde all'*altezza del parallelepipedo rettangolo*.



d è la *diagonale del parallelepipedo rettangolo*: la diagonale di un parallelepipedo rettangolo è il *segmento che unisce due vertici non appartenenti alla stessa faccia*; le diagonali di un parallelepipedo rettangolo sono *congruenti* e si *incontrano in un unico punto*.



Formule relative al parallelepipedo rettangolo

L'area della superficie laterale si calcola moltiplicando il *perimetro del rettangolo di base*, $2 \cdot (a + b)$, *per l'altezza del solido*.

$$A_{laterale} = 2 \cdot (a + b) \cdot h$$

L'area totale si calcola *sommando all'area laterale la doppia area di base* $(2 \cdot a \cdot b)$ o utilizzando la formula:

$$A_{totale} = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$$

[9] La formula per l'area della base dipende dal poligono di base

Il volume si calcola moltiplicando tra loro le misure delle tre dimensioni *a*, *b*, *c*.

$$V = a \cdot b \cdot c$$

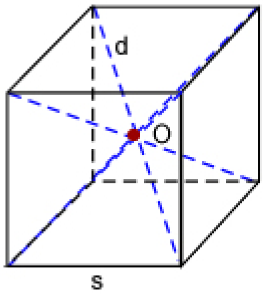
La misura della diagonale si ottiene da

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Formule inverse

Si utilizzano quelle del prisma retto

Cubo



Prisma retto la cui *facce (sei) sono dei quadrati congruenti tra loro*. Il cubo viene anche detto *esaedro regolare* ed è uno dei cinque solidi platonici.

I *dodici spigoli del cubo sono congruenti*. Il punto d'incontro O delle diagonali è il *centro di simmetria* della figura.

Formule relative al cubo

L'area laterale si calcola moltiplicando l'*area di una faccia per quattro*.

$$A_{laterale} = A_{faccia} \cdot 4$$

L'area totale si calcola moltiplicando l'*area di una faccia per sei*.

$$A_{totale} = A_{faccia} \cdot 6$$

Il volume si calcola *elevando al cubo la misura dello spigolo*.

$$V = s^3$$

La diagonale si calcola *moltiplicando la misura dello spigolo per la radice quadrata di 3*.

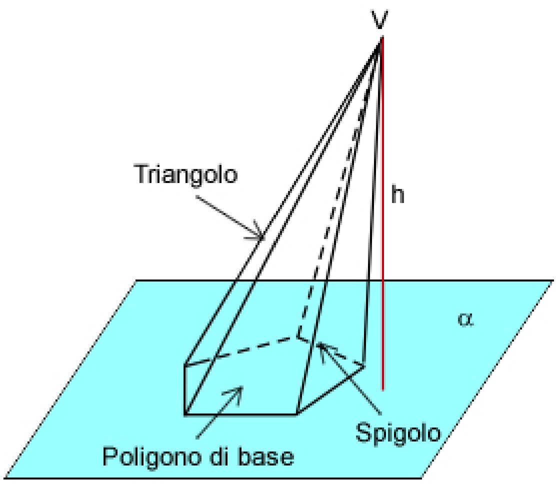
$$d = s \cdot \sqrt{3}$$

Formule inverse

Lo *spigolo*, in relazioni ai dati, in questi modi:

$$s = \sqrt{\frac{A_{laterale}}{4}} \quad o \quad s = \sqrt{\frac{A_{totale}}{6}} \quad o \quad s = \sqrt[3]{V} \quad o \quad s = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

La piramide



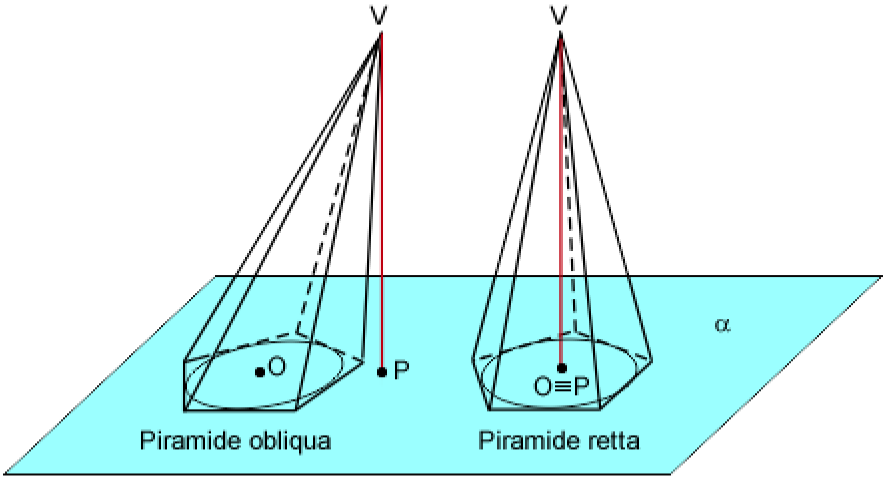
La piramide è un poliedro formato da un poligono denominato **base della piramide** e dai *triangoli ottenuti congiungendo i vertici della base con un punto non appartenente al piano della base* detto **vertice della piramide**. I *triangoli costituiscono la superficie laterale della piramide*, i lati dei triangoli gli *spigoli della piramide* e la *distanza tra il vertice e la base* è l'**altezza** della piramide.

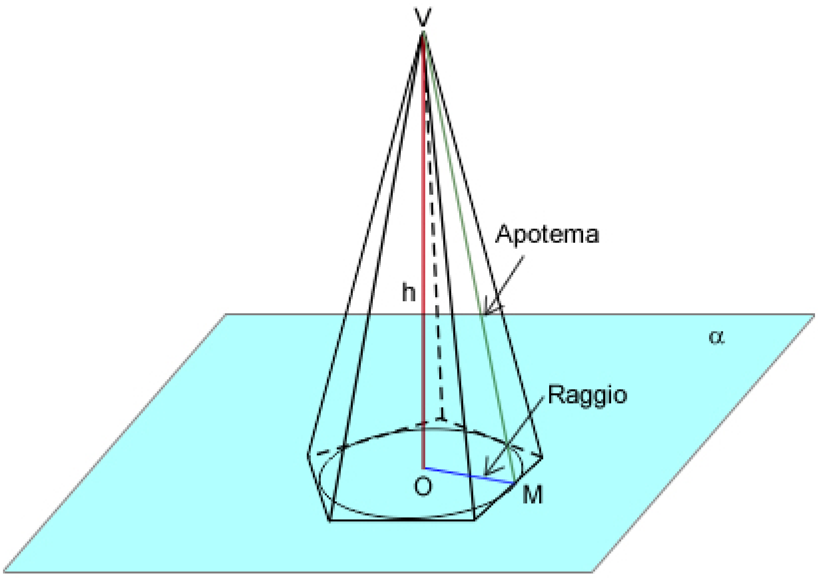
La piramide può essere definita anche come *la regione finita di spazio formata dall'intersezione tra un angoloide di vertice V con* *un piano non passante per V.*

La piramide prende il nome dal numero di lati della base (triangolare, quadrangolare, pentagonale, ecc.).

Quando il poligono di base è *circoscrivibile ad una circonferenza* la piramide può essere:

- ⇨ **Retta**: il piede dell'altezza coincide con il centro della circonferenza.
- ⇨ **Obliqua**: il piede dell'altezza non coincide con il centro della circonferenza



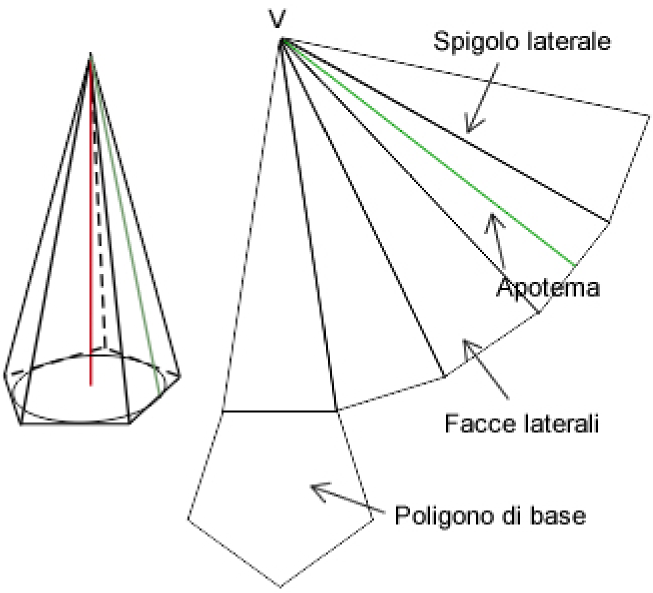


Una piramide retta che ha per base un poligono regolare è detta piramide regolare.

L'**apotema** *a* (VM) di una piramide retta è l'*altezza di ciascun triangolo che forma la superficie laterale della piramide* e gli apotemi, in questo caso, sono *tra loro congruenti*.

Lo sviluppo di una piramide retta è dato da una superficie laterale formata da tanti triangoli isosceli quanti sono i lati di base e dal poligono di base. Nel caso della piramide retta regolare i triangoli isosceli sono congruenti tra loro.

Apotema, altezza della piramide e raggio di base *sono legati tra loro dal teorema di Pitagora* in quanto formano un triangolo rettangolo.



Formule relative alla piramide retta

L'*area laterale della piramide retta* è data dalla somma delle aree dei triangoli laterali e, di conseguenza dal *semiprodotto del perimetro di base con l'apotema*.

$$A_{laterale} = \frac{P_{base} \cdot a}{2}$$

L'*area totale della piramide retta* è data dalla somma tra l'*area laterale e l'area del poligono di base*.

$$A_{totale} = A_{laterale} + A_{poligono\ di\ base}$$

L'*apotema*, l'*altezza* e il *raggio di base* si ricavano utilizzando il *teorema di Pitagora*.

$$a = \sqrt{h^2 + r^2} \qquad h = \sqrt{a^2 - r^2} \qquad r = \sqrt{a^2 - h^2}$$

Il *volume di una piramide retta è un terzo di quello di un prisma con la stessa base e la stessa altezza della piramide*.

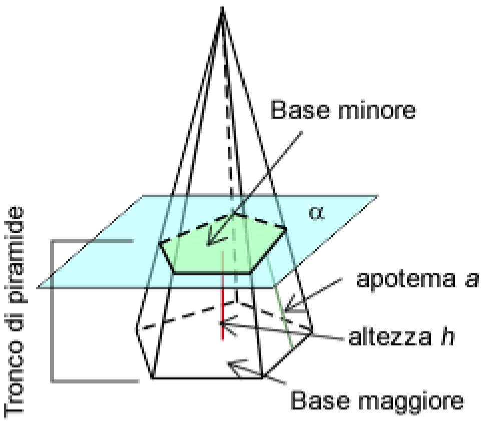
$$V = \frac{A_{base} \cdot h}{3}$$

Formule inverse

$$a = \frac{2 \cdot A_{laterale}}{P_{base}} \qquad P_{base} = \frac{2 \cdot A_{laterale}}{a} \qquad A_{base} = \frac{3 \cdot V}{h} \qquad h = \frac{3 \cdot V}{A_{base}}$$

*** Tronco di piramide.**

È un *solido costituito dalla parte di piramide compresa tra la base e un piano parallelo alla base*. La base della piramide è la *base maggiore* mentre la *base minore* è il *poligono che si ricava dall'intersezione del piano con la piramide*. L'*altezza del solido è data dalla distanza tra le basi*. Se il *poligono di base è regolare il tronco di piramide è detto regolare* e le *facce laterali sono dei trapezi isosceli congruenti* la cui altezza è l'*apotema del tronco*.



L'*area laterale e quella totale* del tronco di piramide regolare si calcolano:

$$A_{laterale} = \frac{(p + p') \cdot a}{2}$$

Dove *p* e *p'* sono i perimetri delle basi e *a* è l'apotema.

$$A_{totale} = A_{laterale} + A + A'$$

Dove *A* e *A'* solo le aree delle basi.

Il *volume* è dato da

$$V = \frac{1}{3} h \cdot \left(A + A' + \sqrt{A \cdot A'}\right)$$

I SOLIDI DI ROTAZIONE

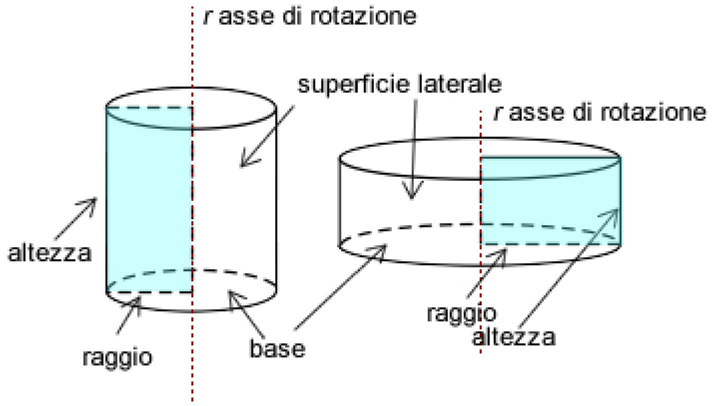
Solido che si ottiene facendo *ruotare di 360° una figura piana*, detta **sezione**, attorno ad un *asse che giaccia nel suo piano e che non abbia punti interni alla sezione*.

Cilindro

Il **cilindro finito retto** si ottiene *ruotando completamente un rettangolo* attorno ad una *retta r* (**asse**) *passante per un suo lato*.

Il cilindro ha *due basi congruenti costituita da due cerchi* il cui raggio è il *raggio di base del cilindro*. Questo raggio può essere la dimensione

- ⇨ minore del rettangolo se l'asse di rotazione passa per la dimensione maggiore
- ⇨ maggiore del rettangolo se l'asse di rotazione passa per la dimensione minore

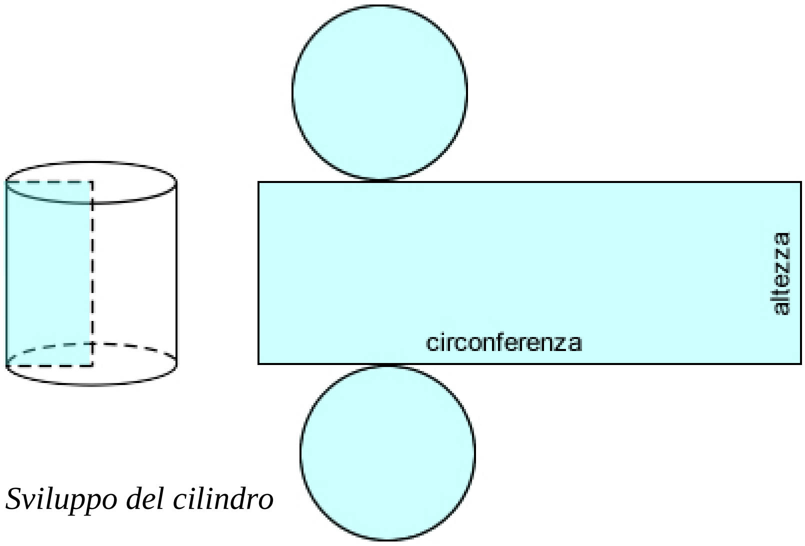


La superficie laterale è la superficie curva generata dalla rotazione completa del rettangolo attorno all'asse di rotazione.

L'*altezza del cilindro* è la *distanza tra le basi* e la sua misura coincide con la dimensione

- ⇨ maggiore del rettangolo se l'asse di rotazione passa per la dimensione maggiore
- ⇨ minore del rettangolo se l'asse di rotazione passa per la dimensione minore

Quando l'*altezza del cilindro è uguale al diametro di base* il cilindro prende il nome di **cilindro equilatero**.



Sviluppo del cilindro

Lo sviluppo di un cilindro è costituita da una *superficie rettangolare* avente per dimensioni la *circonferenza di base e l'altezza del cilindro* e i *due cerchi congruenti*.

Formule relative al cilindro

L'*area laterale* del cilindro si trova *moltiplicando la lunghezza della circonferenza di base* ($c = 2\pi r$) *per l'altezza h*; *r* è il raggio di base.

$$A_{laterale} = 2\pi r \cdot h$$

L'*area totale* si calcola *sommando all'area laterale la doppia area di base*

$$A_{totale} = A_{laterale} + 2 \cdot \pi r^2$$

Oppure

$$A_{totale} = 2\pi r \cdot (r + h)$$

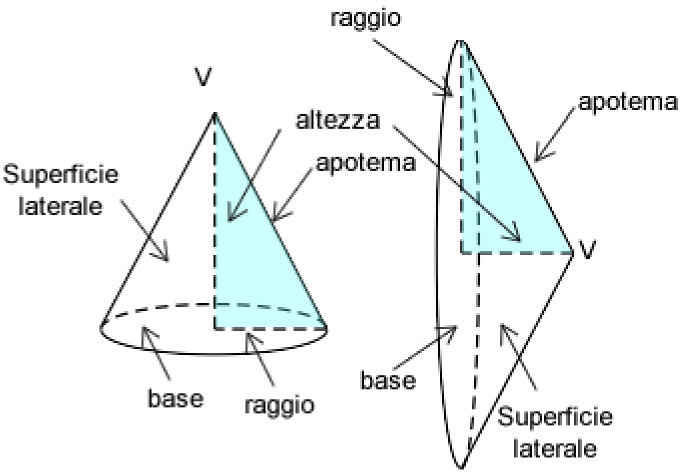
Il *volume* si calcola *moltiplicando l'area di base* ($A = \pi r^2$) del cilindro *per la sua altezza*.

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

Formule inverse

$$r = \frac{A_{laterale}}{2\pi h} \qquad h = \frac{A_{laterale}}{2\pi r} \qquad r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}} \qquad h = \sqrt{\frac{V}{\pi r}}$$

Il cono



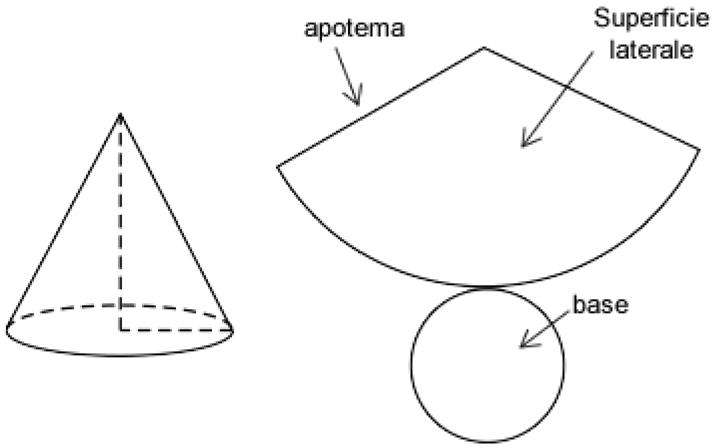
Il **cono finito circolare retto** è il solido che si *ottiene ruotando di 360° un triangolo rettangolo attorno ad un asse che passa per uno dei cateti*.

È delimitato da un cerchio, la *base*, e da una *superficie curva detta superficie laterale*.

Il cateto attorno al quale avviene la rotazione è l'*altezza del cono* mentre l'*ipotenusa del triangolo rettangolo è l'apotema del cono*.

Quando l'*apotema del cono ha la stessa misura del diametro di base* il cono viene detto **equilatero**.

Lo sviluppo di un cono è un *settore circolare avente la superficie uguale a quella laterale del cono* e dal cerchio di base



Formule relative al cono

L'*area laterale* del cono si trova *moltiplicando la lunghezza della semicirconferenza di base per l'apotema a*; *r* è il raggio di base.

$$A_{laterale} = \pi r \cdot a$$

L'*area totale* si calcola *sommando all'area laterale l' area di base*

$$A_{totale} = A_{laterale} + \pi r^2$$

Oppure

$$A_{totale} = \pi r \cdot (r + a)$$

Il *volume* è un terzo di quello di una cilindro avente la stessa base e la stessa latezza del cono.

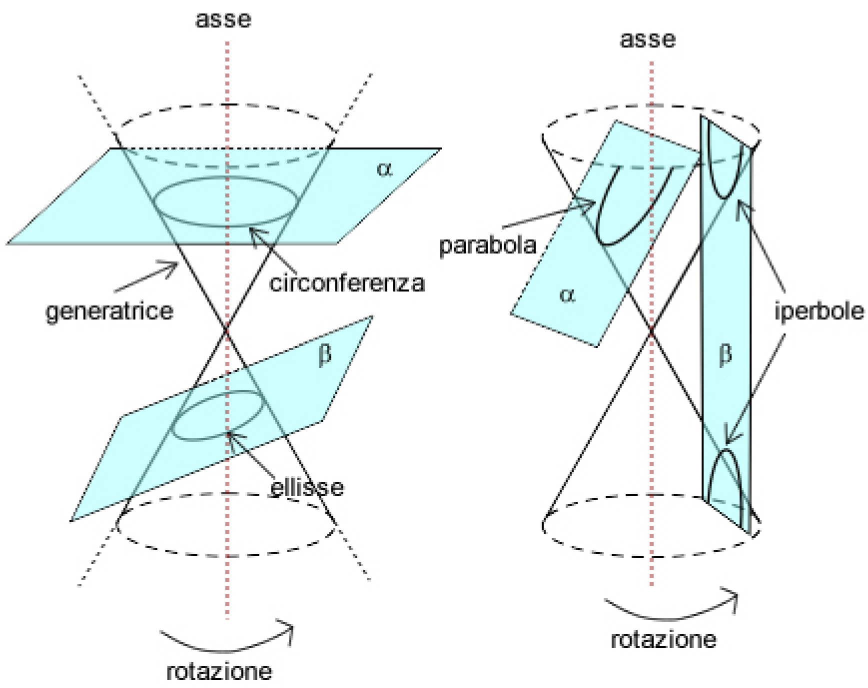
$$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$$

Formule inverse

$$r = \frac{A_{laterale}}{\pi a} \qquad a = \frac{A_{laterale}}{\pi r} \qquad r = \sqrt{\frac{3 \cdot V}{\pi h}} \qquad h = \sqrt{\frac{3 \cdot V}{\pi r}}$$

*** Coniche**

Una *sezione conica*, o semplicemente **conica**, si intende una curva piana che si ottiene intersecando la superficie di un cono circolare retto con un piano.
Un cono può essere *generato dalla rotazione di una retta, detta **generatrice**, attorno ad una retta* (***asse***) *ad essa incidente in un punto V*: il cono viene detto **cono indefinito circolare retto** ed è costituito dal vertice V e da due superfici connesse attraverso il vertice V dette **falde**.



Il tipo di conica dipende dal modo con cui il piano interseca la superficie del cono:

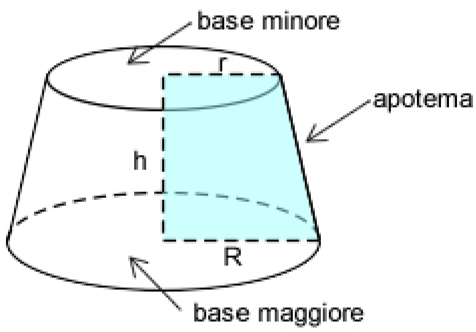
- ⇨ **circonferenza** se il piano è parallelo alla base
- ⇨ **ellisse** se il piano è inclinato rispetto alla base ma non interseca la base
- ⇨ **parabola** se il piano è parallelo ad una retta generatrice e appartiene ad una sola falda
- ⇨ **iperbole** se il piano interseca entrambe le falde.

*** Tronco di cono circolare retto**

Solido costituito dalla parte di *cono circolare retto compresa tra la base e un piano parallelo alla base*. Il tronco di cono ha

- una *base maggiore*: la base del cono
- una *base minore*: la sezione del piano con il cono

L'*altezza* del cono è la *distanza tra le basi*.
R e *r* sono rispettivamente il *raggio della base maggiore* e quello della *base minore*.



Il tronco di cono circolare rette può essere pensato come il risultato della *rotazione completa di un trapezio rettangolo attorno al lato perpendicolare alle basi*.

Formule

L'*area della superficie laterale* si ottiene moltiplicando la *somma dei raggi (R + r) per l'apotema a* e per π.

$$A_{laterale} = (R + r) \cdot a \cdot \pi$$

L'*area della superficie totale* si calcola *sommando alla superficie laterale la somma delle aree della base maggiore e della base minore*.

$$A_{totale} = A_{laterale} + \pi R^2 + \pi r^2$$

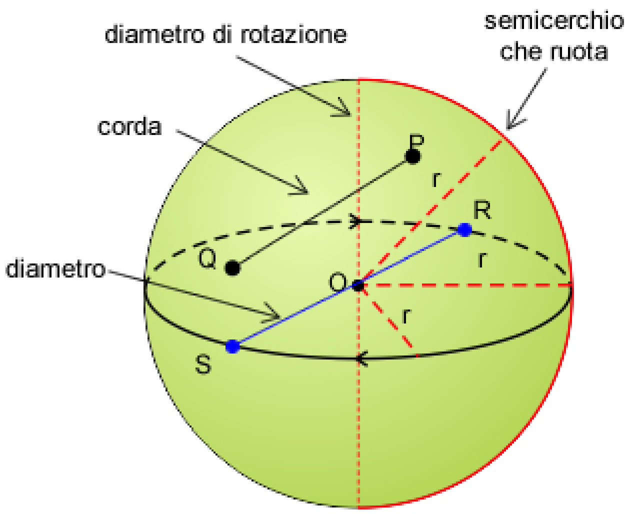
Il *volume* è dato da

$$V = \frac{1}{3}\pi h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r)$$

La sfera

La sfera è un solido che può essere definito in due modi:

- ⇨ solido risultante dalla *rotazione completa di un semicerchio attorno al diametro*
- ⇨ luogo dei punti dello spazio che hanno una distanza minore o uguale ad una distanza prefissata *r* (**raggio della sfera**) maggiore di zero, da un punto fisso O (**centro della sfera**).



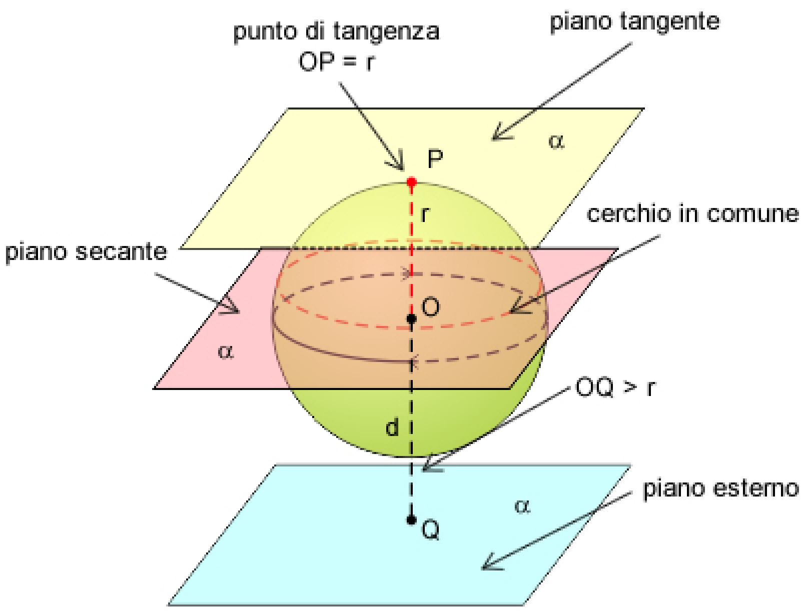
La superficie di una sfera è l'insieme di tutti i punti dello spazio equidistanti da l centro della sfera.

Ogni segmento che congiunge *due punti qualsiasi della superficie sferica* è detto **corda** della sfera.

Ogni *corda che passa per il centro della sfera* è detto **diametro** della sfera.

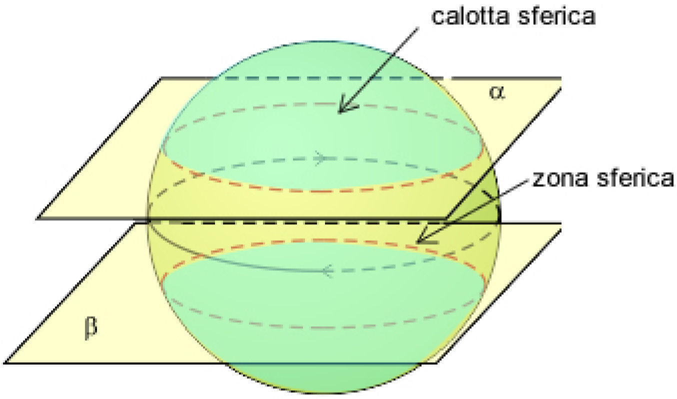
Un piano α rispetto ad una sfera di centro O può essere:

- ⇨ **esterno** se la *distanza tra α e O è maggiore del raggio* della sfera (non hanno punti in comune)
- ⇨ **tangente** se la *distanza tra α e O è uguale del raggio* della sfera (hanno un punto in comune)
- ⇨ **secante** se la *distanza tra α e O è*



minore del raggio della sfera (hanno in comune tutti i punti di un cerchio). Quando il piano passa per il centro O della sfera si ottiene il *cerchio di circonferenza massima* che viene detto *geodetica della sfera*.

In geografia le geodetiche corrispondono ai *meridiani* mentre le circonferenze ricavate dai piano perpendicolari a quelli che generano alle geodetiche sono i *paralleli*.

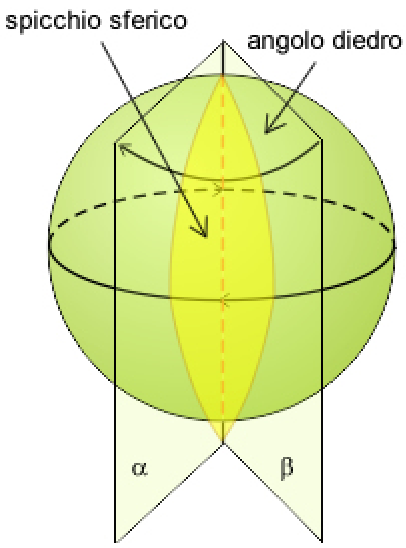


Un piano che interseca una sfera la divide in due *calotte sferiche*.

Due piani paralleli che intersecano una sfera la suddividono in tre parti:

- ⇨ due calotte sferiche o *segmenti sferici ad una base*
- ⇨ una *zona sferica* o *segmento sferico a due basi*

Un angolo diedro che abbia come spigolo un diametro della sfera determina la formazione di uno *spicchio sferico*.



Formule relative alla sfera

L’area della **superficie di una sfera** si calcola (r è il raggio della sfera):

$$S_{sfera} = 4\pi r^2$$

Il **volume** della sfera si trova:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Formule inverse

$$r = \sqrt{\frac{S_{sfera}}{4\pi}} \qquad r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

**** Altre formule***

Calotta sferica

h è l’altezza della calotta sferica ossia la distanza tra la base della calotta e la sua sommità

$$S_{calotta} = 2\pi r \cdot h$$

Zona sferica

h è l’altezza della zona sferica ossia la distanza tra le due basi della zona sferica

$$S_{calotta} = 2\pi r \cdot h$$

Spicchio sferico

$\hat{\alpha}$ è l'ampiezza dell'angolo diedro che forma lo spicchio sferico

$$S_{spicchio} = \frac{\pi r^2 \cdot \hat{\alpha}}{90°}$$

ESEMPI DI SOLIDI COMPOSTI

Poliedri

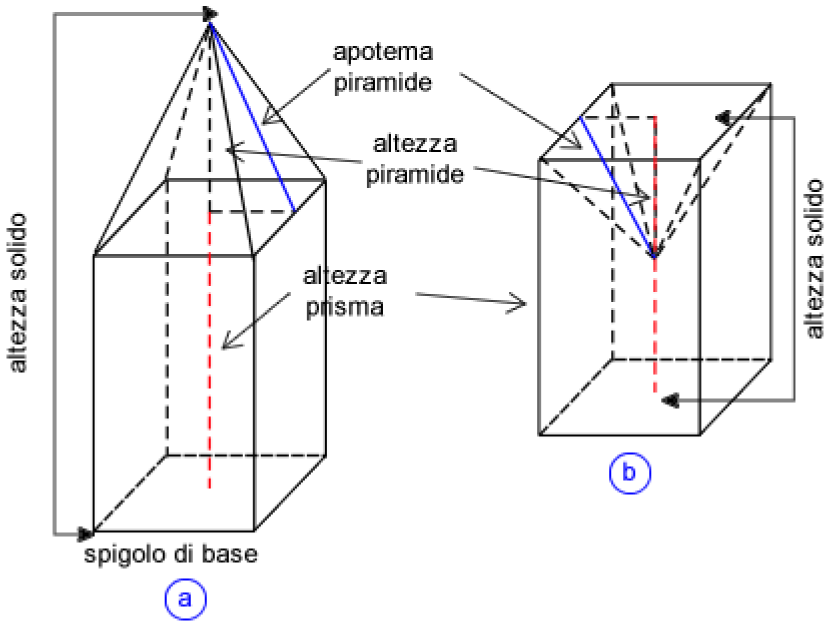


Figura a

Il solido è formato da un prisma a base quadrata sormontato da una piramide retta con base coincidente con quella del prisma.

Calcolo dell'area della superficie totale

$$A_{totale} = S_{laterale\ prisma} + S_{laterale\ piramide} + A_{base}$$

N. B. Nel calcolo dell'area della superficie totale non va inserita l'area della base del prisma coincidente con quella della piramide[10].

Calcolo del volume

$$V_{totale} = V_{prisma} + V_{piramide}$$

Figura b

Il solido è formato da un prisma a base quadrata con un incavo formato da una piramide retta con base coincidente con quella del prisma.

Calcolo dell'area della superficie totale

$$A_{totale} = S_{laterale\ prisma} + S_{laterale\ piramide} + A_{base}$$

[10] Come suggerimento per il calcolo della superficie totale di un solido composto si può pensare alla superficie del solido che posso toccare con le mani.

N. B. Nel calcolo dell’area della superficie totale non va inserita l’area della base del prisma coincidente con quella della piramide perché è vuota.

Calcolo del volume

$$V_{totale} = V_{prisma} - V_{piramide}$$

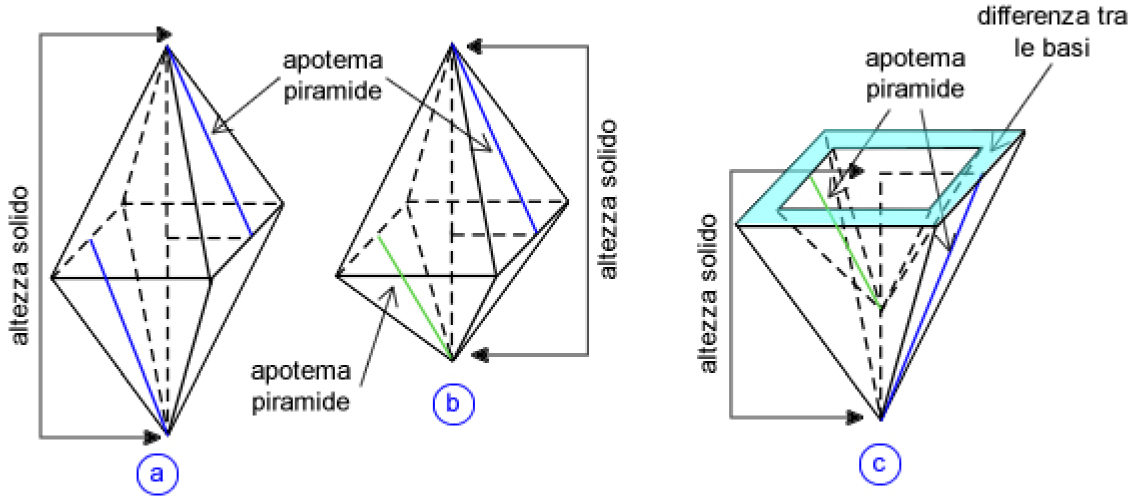


Figura a

Il solido è formato da due piramidi congruenti unite per la base.

Calcolo dell’area della superficie totale

$$A_{totale} = 2 \times S_{laterale\ piramide}$$

N. B. Nel calcolo dell’area della superficie totale non va inserita l’area della base che le piramidi hanno in comune.

Calcolo del volume

$$V_{totale} = 2 \times V_{piramide}$$

Figura b

Il solido è formato da due piramidi (la più alta *1*, l’altra *2*) con altezze diverse ma con basi congruenti, unite per la base. Le due piramidi hanno apotemi diversi per cui nel calcolo dell’area delle due superfici laterali va tenuto conto di questo.

Calcolo dell’area della superficie totale

$$A_{totale} = S_{laterale\ piramide\ 1} + S_{laterale\ piramide\ 2}$$

N. B. Nel calcolo dell’area della superficie totale non va inserita l’area della base che le piramidi hanno in comune.

Calcolo del volume

$$V_{totale} = V_{piramide\ 1} + V_{piramide\ 2}$$

Figura c

Il solido è formato da una piramide (piramide *1*)con la base che presenta un incavo a forma di piramide (piramide *2*). Le basi sono diverse.

Calcolo dell'area della superficie totale

$$A_{totale} = S_{laterale\ piramide} + S_{laterale\ incavo} + A_{base\ maggiore-base\ minore}$$

Calcolo del volume

$$V_{totale} = V_{piramide\ 1} - V_{piramide\ 2}$$

Solidi di rotazione

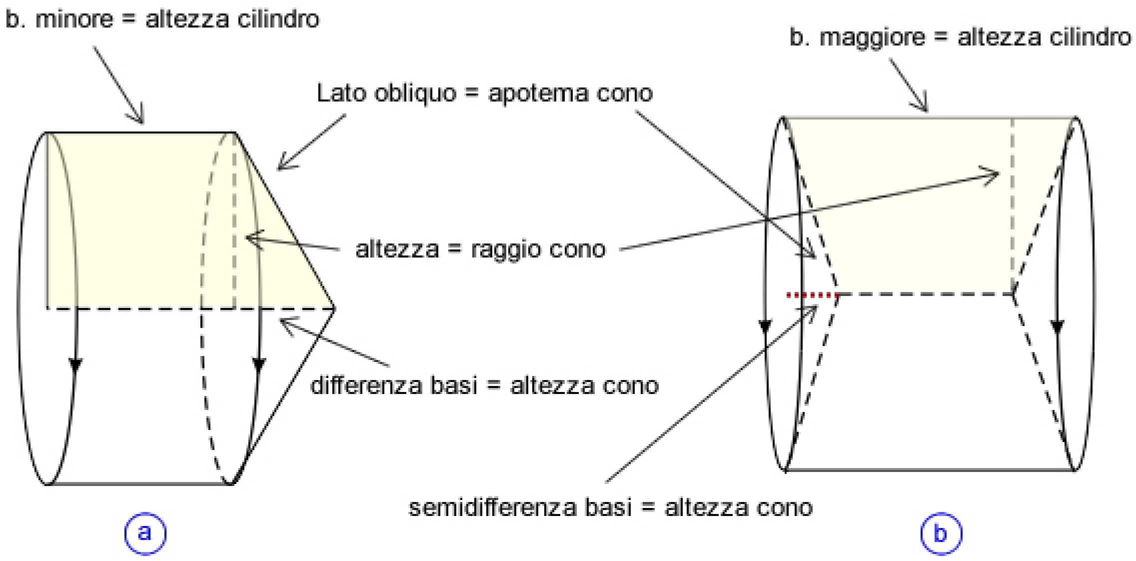


Figura a

Il solido è formato dalla rotazione di un trapezio rettangolo attorno alla base maggiore; il solido risulta formato da un cilindro sormontato da un cono con base coincidente con quella del cilindro.

- l'altezza del cilindro è la base minore del trapezio rettangolo
- l'altezza del cono è data dalla differenza tra base maggiore e base minore del trapezio rettangolo
- l'apotema del cono è il lato obliquo del trapezio rettangolo

Calcolo dell'area della superficie totale

$$A_{totale} = S_{laterale\ cilindro} + S_{laterale\ cono} + A_{area\ \ base}$$

N. B. Nel calcolo dell'area della superficie totale non va inserita l'area della base che cono e cilindro hanno in comune.

Calcolo del volume

$$V_{totale} = V_{cilidro} + V_{cono}$$

Figura b

Il solido è formato dalla rotazione di un trapezio isoscele attorno alla base minore; il solido risulta formato da un cilindro con due incavi della stessa profondità a forma di cono con basi coincidenti con quella del cilindro.

- l'altezza del cilindro è la base maggiore del trapezio isoscele

- l'altezza del cono (i cono sono congruenti) è data dalla semidifferenza tra base maggiore e base minore del trapezio isoscele
- l'apotema del cono è il lato obliquo del trapezio isoscele

Calcolo dell'area della superficie totale

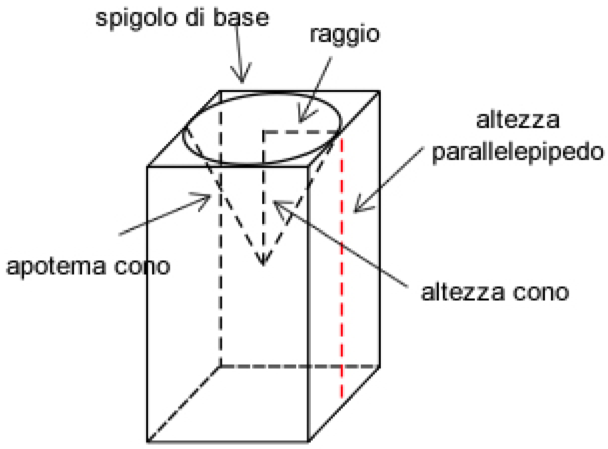
$$A_{totale} = S_{laterale\ cilindro} + 2 \times S_{laterale\ cono}$$

N. B. Nel calcolo dell'area della superficie totale non vanno inserite le aree delle due basi che cono e cilindro hanno in comune.

Calcolo del volume

$$V_{totale} = V_{cilidro} - 2 \times V_{cono}$$

Solidi particolari



Il solido è formato da un parallelepipedo retto a base quadrata con un incavo, sulla faccia di base, a forma di cono la cui circonferenza è inscritta nella base quadrata del parallelepipedo retto.

Calcolo dell'area della superficie totale

$$A_{totale} = S_{laterale\ parallelepipedo} + S_{laterale\ cono} + A_{base\ parallelepipedo} + \left(A_{b.\ parallelepipedo} - A_{base\ cono}\right)$$

Calcolo del volume

$$V_{totale} = V_{parallelepipedo} - V_{cono}$$